Theoretische Informatik – Übung Gruppe 4

Roman Langrehr

Aufgabe 22

(a) Wir betrachten die Sprache

$$L_{\text{all}} = \{\text{Kod}(M) \mid M \text{ ist Turingmaschine mit } L(M) = \Sigma^*\}\,.$$

Zeigen Sie, dass $L_{\text{H}}^{\complement} \leq_{\text{EE}} L_{\text{all}}$, indem Sie eine konkrete Reduktion angeben und ihre Korrektheit beweisen.

(b) Wir betrachten die Sprache

$$L_{\text{infinite}} = \{\text{Kod}(M) \mid M \text{ hält auf keiner Eingabe}\}\,.$$

Zeigen Sie, dass $(L_{\text{infinite}})^{\complement} \in \mathcal{L}_{\text{RE}}$ gilt.

NP-Vollständigkeit

Definition (Polynomielle Reduktion)

Seien $L_1 \subseteq \Sigma_1^*$ und $L_2 \subseteq \Sigma_2^*$ zwei Sprachen. Wir sagen, dass L_1 polynomiell auf L_2 reduzierbar ist, $L_1 \leq_p L_2$, falls eine polynomielle TM (ein polynomieller Algorithmus) A existiert, die für jedes Wort $x \in \Sigma_1^*$ ein Wort $A(x) \in \Sigma_2^*$ berechnet, so dass

$$x \in L_1 \iff A(x) \in L_2$$

Wenn L_1 NP-schwer ist und $L_1 \leq_p L_2$, dann ist auch L_2 NP-schwer.

NP-Vollständigkeit

Definition

Eine Sprache L ist NP-vollständig, falls $L \in \mathrm{NP}$ und L NP-schwer ist.

NP-Vollständigkeit

$3\mathrm{COLOUR} := \{G \mid G = (V, E)$ ist ein ungerichteter Graph und $\exists c : V \to \{R, G, B\} : c(u) = c(v) \to (u, v) \notin E\}$

Aufgabe

Zeige direkt (ohne den Satz von Cook zu benutzen) dass $3\mathrm{COLOUR} \leq_p \mathrm{SAT}$.

Vorsicht: Um zu zeigen, dass $3\mathrm{COLOUR}$ NP-schwer ist, müsste man $\mathrm{SAT} \leq_p 3\mathrm{COLOUR}$ zeigen.

NP-Vollständigkeit

$\text{HAMILTON-CYCLE} := \{G \mid G = (V, E)$ ist ein ungerichteter Graph mit einem Hamiltonkreis, d.h. einen geschlossenen Pfad der alle Knoten genau 1 Mal besucht. $\}$

$\text{TSP} := \{(G, w, k) \mid G = (V, E)$ ist ein vollständiger Graph, $w : E \to \mathbb{N}_0$ Kantengewichte und es gibt einen Hamiltonkreis mit Gesamtgewicht höchstens $k\}$

Aufgabe

Beweise das TSP NP-vollständig ist. Ihr dürft ohne Beweis annehmen, dass HAMILTON-CYCLE NP-schwer ist.