Theoretische Informatik – Übung Gruppe 4

Roman Langrehr

Aufgabe 17

Wir bezeichnen mit w_i das i-te Wort über Σ_{bool} in kanonischer Ordnung und mit M_i die i-te Turingmaschine in kanonischer Ordnung. Wir betrachten die Sprachen

$$L_1 = \{w \in \{0,1\}^* \mid w = w_i \text{ für ein } i \in \mathbb{N} - \{0\} \text{ und } M_{2i} \text{ akzeptiert } w \text{ nicht}\}$$

und

$$L_2 = \{w \in \{0,1\}^* \mid w = w_i \text{ für ein } i \in \mathbb{N} - \{0\} \text{ und } M_{\lceil i/2 \rceil} \text{ akzeptiert } w \text{ nicht}\}\,.$$

Beweisen Sie für eine der beiden Sprachen L_1 und L_2, dass sie nicht rekursiv aufzählbar ist, und erläutern Sie, warum man für die andere Sprache keinen analogen Beweis führen kann. **10 Punkte**

Aufgabe 17

Wir zeigen zunächst mit Hilfe eines indirekten Beweises, dass L_2 nicht rekursiv aufzählbar ist. Angenommen, L_2 sei rekursiv aufzählbar. Dann gibt es eine Turingmaschine M mit $L(M) = L_2$. Weil M eine der Turingmaschinen in der kanonischen Aufzählung aller Turingmaschinen sein muss, existiert ein $j \in \mathbb{N} - \{0\}$, so dass $M_j = M$. Wir betrachten nun das Wort $w_i = w_{2j}$. Dann gilt

$$\begin{aligned} w_i = w_{2j} \in L_2 &\iff M_{\lceil i/2 \rceil} = M_j \text{ akzeptiert } w_{2j} \text{ nicht} \quad \text{(nach Definition von } L_2\text{)} \\ &\iff M \text{ akzeptiert } w_{2j} \text{ nicht} \quad \text{(nach Definition von } M\text{)} \\ &\iff w_{2j} \notin L(M) \\ &\iff w_{2j} = w_i \notin L_1. \end{aligned}$$

Dies ist ein Widerspruch, also war die Annahme falsch und L_2 ist nicht rekursiv aufzählbar.

Aufgabe 18

In dieser Aufgabe wollen wir ein alternatives Turingmaschinen-Modell definieren, das sich in den folgenden beiden Punkten von unserem Standard-Modell unterscheidet:

(i) Neben dem akzeptierenden und dem verwerfenden Zustand soll nur genau ein weiterer Zustand existieren.

(ii) Der Lese-/Schreibkopf kann in einem Schritt nicht nur das Symbol des Feldes, auf dem er steht, lesen und gegebenenfalls modifizieren, sondern auch die Symbole der benachbarten Felder.

(a) Definieren Sie ein solches neues Modell...

(b) Beschreiben Sie, wie Sie zu jeder vorgegebenen Turingmaschine M des Standardmodells eine äquivalente Turingmaschine M' Ihres neuen Modells konstruieren können.

Aufgabe 18

(a) Wir können unser neues Modell beispielsweise wie folgt definieren. Eine Turingmaschine des neuen Modells ist ein 7-Tupel $M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, q_{\text{accept}}, q_{\text{reject}})$, wobei

(i) $Q = \{q_0, q_{\text{accept}}, q_{\text{reject}}\}$,

(ii) Σ ein Alphabet mit $¢, \sqcup \notin \Sigma$ ist,

(iii) Γ ein Alphabet mit $¢, \sqcup \in \Gamma$, $\Sigma \subseteq \Gamma$ und $\Gamma \cap Q = \emptyset$ ist,

(iv) $\delta\colon \{q_0\} \times \Gamma^3 \to Q \times \Gamma^3 \times \{\mathrm{L}, \mathrm{R}, \mathrm{N}\}$ mit der Eigenschaft

$$\forall s, s' \in \Gamma\colon\ \exists q \in Q, \tilde{s}, \tilde{s}' \in \Gamma, d \in \{\mathrm{R}, \mathrm{N}\}\colon \qquad \delta(q_0, (¢, s, s')) = (q, (¢, \tilde{s}, \tilde{s}'), d).$$

Aufgabe 18

Wir können die Definition einer Konfiguration unverändert vom Standardmodell übernehmen. Die Definition eines Berechnungsschrittes muss hingegen an die neue Übergangsfunktion δ angepasst werden. Dies ist wie folgt möglich:

(i) $x_1 \dots x_{i-1} q x_i \dots x_n \vdash_M x_1 \dots x_{i-2} y_{\mathrm{L}} p y y_{\mathrm{R}} x_{i+2} \dots x_n$,
falls $\delta(q_0, (x_{i-1}, x_i, x_{i+1})) = (p, (y_{\mathrm{L}}, y, y_{\mathrm{R}}), \mathrm{N})$

(ii) $x_1 \dots x_{i-1} q x_i \dots x_n \vdash_M x_1 \dots x_{i-2} p y_{\mathrm{L}} y y_{\mathrm{R}} x_{i+2} \dots x_n$,
falls $\delta(q_0, (x_{i-1}, x_i, x_{i+1})) = (p, (y_{\mathrm{L}}, y, y_{\mathrm{R}}), \mathrm{L})$

(iii) $x_1 \dots x_{i-1} q x_i \dots x_n \vdash_M x_1 \dots x_{i-2} y_{\mathrm{L}} y p y_{\mathrm{R}} x_{i+2} \dots x_n$,
falls $\delta(q_0, (x_{i-1}, x_i, x_{i+1})) = (p, (y_{\mathrm{L}}, y, y_{\mathrm{R}}), \mathrm{R})$, für $i < n - 1$ und

(iv) $x_1 \dots x_{n-2} q x_{n-1} x_n \vdash_M x_1 \dots x_{n-2} y_{\mathrm{L}} y p y_{\mathrm{R}} \sqcup$,
falls $\delta(q_0, (x_{n-2}, x_{n-1}, x_n)) = (p, (y_{\mathrm{L}}, y, y_{\mathrm{R}}), \mathrm{R})$.

Wir gehen hierbei davon aus, dass der Lese-/Schreibkopf zu Beginn nicht auf dem Feld mit Symbol ¢ steht, sondern auf dem Feld rechts davon, die Startkonfiguration für ein Eingabewort x ist also ¢$q_0 x$ falls $|x| \geq 2$, ¢$q_0 x \sqcup$ falls $|x| = 1$ und ¢$q_0 \sqcup\sqcup$ falls $|x| = 0$. Die verbleibenden Definitionen – insbesondere der Begriff einer Berechnung und der Begriff der von einer Turingmaschine akzeptierten Sprache – lassen sich nun unverändert übernehmen.

Aufgabe 18

Formal definieren wir

$$M' = (\{q_0, q_{\text{accept}}, q_{\text{reject}}\}, \Sigma, \Gamma \cup \Gamma \times Q, \delta', q_0, q_{\text{accept}}, q_{\text{reject}}),$$

wobei für alle $q, \tilde{q} \in Q$, $s, s_{\text{L}}, s_{\text{R}}, \tilde{s} \in \Gamma$ und $S \in \{\text{L}, \text{R}, \text{N}\}$

$$\delta'(q_0, \left(s_{\text{L}}, s, s_{\text{R}}\right)) = (q_0, \left(s_{\text{L}}, \begin{pmatrix} s \\ q_0 \end{pmatrix}, s_{\text{R}}\right), \text{N})$$

und, falls $\delta(q, s) = (\tilde{q}, \tilde{s}, S)$ mit $\tilde{q} \notin \{q_{\text{accept}}, q_{\text{reject}}\}$, dann

$$\delta'(q_0, \left(s_{\text{L}}, \begin{pmatrix} s \\ q \end{pmatrix}, s_{\text{R}}\right)) = (q_0, (\begin{pmatrix} s_{\text{L}} \\ \tilde{q} \end{pmatrix}, \tilde{s}, s_{\text{R}}), \text{L}), \text{ falls } S = \text{L},$$

$$\delta'(q_0, \left(s_{\text{L}}, \begin{pmatrix} s \\ q \end{pmatrix}, s_{\text{R}}\right)) = (q_0, \left(s_{\text{L}}, \tilde{s}, \begin{pmatrix} s_{\text{R}} \\ \tilde{q} \end{pmatrix}\right), \text{R}), \text{ falls } S = \text{R und}$$

$$\delta'(q_0, \left(s_{\text{L}}, \begin{pmatrix} s \\ q \end{pmatrix}, s_{\text{R}}\right)) = (q_0, \left(s_{\text{L}}, \begin{pmatrix} \tilde{s} \\ \tilde{q} \end{pmatrix}, s_{\text{R}}\right), \text{N}), \text{ falls } S = \text{N},$$

und, falls $\delta(q, s) = (\tilde{q}, \tilde{s}, S)$ mit $\tilde{q} \in \{q_{\text{accept}}, q_{\text{reject}}\}$, dann

$$\delta'(q_0, \left(s_{\text{L}}, \begin{pmatrix} s \\ q \end{pmatrix}, s_{\text{R}}\right)) = (\tilde{q}, \left(s_{\text{L}}, \tilde{s}, s_{\text{R}}\right), \text{S})$$

sei.

Aufgabe 18

Aufgabe

Wie kann man zu einer TM M' des alternativen Modells eine äquivalente Standard-TM M bauen?

Kolmogorov Komplexität

Aufgabe

Zeige, dass es nur endliche viele zufällige Fibonacci-Zahlen gibt.

Tipp: Benutze, dass für $n \geq 11$ für die n-te Fibonacci-Zahl $F_n \geq (3/2)^n$ gilt.

Kolmogorov Komplexität

Aufgabe

Betrachte die Sprache $L := \{w \in \{0,1\}^* \mid w = w^R\}$.
Zeige dass es für jedes $n \in \mathbb{N}$ ein Wort $w \in L$ gibt mit $|w| = n$ und $K(w) \geq \lceil n/2 \rceil$.

Nicht-Reguläre Sprachen

Aufgabe

Zeige mit Hilfe der Methode der Kolmogrov Komplexität dass

$$L := \{0^n 1^m \mid m \text{ teilt } n\}$$

nicht regulär ist.