Theoretische Informatik – Übung Gruppe 4

Roman Langrehr

Kolmogorov-Komplexität

Definition (Kolmogorov-Komplexität)

Für jedes Wort $w \in \{0,1\}^*$ ist die Kolmogorov-Komplexität $K(w)$ des Wortes w das Minimun der binären Längen der Pascal-Programme, die w generieren.

Kolmogorov-Komplexität

Aufgabe

Wir betrachten die Wörter $w_n = 0^n 1^{n^2}$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$. Welches der folgenden Programme liefert die beste obere Schranke für $K(w_n)$?

(a) Das Programm A_n:

```
begin
  x:= n;
  y:= 0;
  for i:=1 to x do
  begin
    write(0);
    y:= y+x;
  end
  for j:=1 to y do
    write(1);
end.
```

(b) Das Programm B_n:

```
begin
  for i:=1 to n do
    write(0);
  for i:=1 to n do
    for j:=1 to n do
      write(1);
end.
```

(c) Das Programm C_n:

```
begin
  for i:=1 to n do
    write(0);
  for i:=1 to n^2 do
    write(1);
end.
```

Kolmogorov-Komplexität

Aufgabe

Sei $w_n := 10^{n^{10}}1$ für $n \in \mathbb{N}_0$.

1. Gebe eine möglichst gute obere Schranke für $K(w_n)$ in Abhängigkeit von n an.
2. Gebe eine möglichst gute obere Schranke für $K(w_n)$ in Abhängigkeit von $|w_n|$ an.

Kolmogorov-Komplexität

Aufgabe

Sei $L := \{(10)^i 101 (01)^j \mid i, j \in \mathbb{N}_0\}$. Gebe eine möglichst gute obere Schranke für $K(w)$ in Abhängigkeit von $|w|$ für $w \in L$ an.

Kolmogorov-Komplexität

Definition (kanonische Ordnung)

Sei $\Sigma = \{s_1, \ldots, s_m\}$, $m \in \mathbb{N}_+$ ein Alphabet und sei $s_1 < s_2 < \cdots < s_m$ eine Ordnung auf Σ. Wir definieren die kanonische Ordnung auf Σ^* für $u, v \in \Sigma^*$ wie folgt:

$$u < v \Leftrightarrow |u| < |v| \vee |u| = |v| \wedge \exists x, u', v' \in \Sigma^*, i < j : u = xs_iu' \wedge v = xs_jv'$$

Kolmogorov-Komplexität

Theorem (Satz 2.2)

Sei L eine Sprache über $\{0,1\}$. Sei für jedes $n \in \mathbb{N}_+$ z_n das n-te Wort in L bezüglich der kanonischen Ordnung. Wenn ein Programm A_L existiert, das das Entscheidungsproblem $(\{0,1\}, L)$ löst, dann gilt für alle $n \in \mathbb{N}_+$, dass

$$K(z_n) \leq \lceil \log_2(n+1) \rceil + c,$$

wobei c eine von n unabhängige Konstante ist.