ETH zürich

Theoretische Informatik – Übung Gruppe 3

Roman Langrehr

Aufgabe 30

a) Sei $\mathrm{DREIFACH\text{-}SAT}$ die Menge aller KNF-Formeln, die mindestens drei erfüllende Belegungen haben. Zeigen Sie $\mathrm{SAT} \leq_p \mathrm{DREIFACH\text{-}SAT}$.
(b) Sei $\mathrm{E3SAT}$ die Menge aller KNF-Formeln mit genau drei Literalen paarweise unterschiedlicher Variablen pro Klausel, die eine erfüllende Belegung haben. Zeigen Sie $\mathrm{3SAT} \leq_p \mathrm{E3SAT}$.

NP-Vollständigkeit

$\mathrm{HAMILTON\text{-}CYCLE} := \{G \mid G = (V, E)$ ist ein ungerichteter Graph mit einem Hamiltonkreis, d.h. einen geschlossenen Pfad der alle Knoten genau 1 Mal besucht. $\}$
$\mathrm{TSP} := \{(G, w, k) \mid G = (V, E)$ ist ein vollständiger Graph, $w : E \to \mathbb{N}_0$ Kantengewichte und es gibt einen Hamiltonkreis mit Gesamtgewicht höchstens $k\}$

Aufgabe

Beweise das TSP NP-vollständig ist. Ihr dürft ohne Beweis annehmen, dass $\mathrm{HAMILTON\text{-}CYCLE}$ NP-schwer ist.

Grammatiken

Eine Grammatik ist ein 4-Tupel $G = (\Sigma_N, \Sigma_T, P, S)$ wobei

- Σ_N: Nichtterminalalphabet ("Temporäre Arbeits-Symbole")
  - Konvention: Großbuchstaben
- Σ_T mit $\Sigma_N \cap \Sigma_T$: Terminalalphabet ("Eigentliche Symbole")
  - Konvention: Kleinbuchstaben
- $P \subseteq (\Sigma_N \cup \Sigma_T)^* \Sigma_N (\Sigma_N \cup \Sigma_T)^* \times (\Sigma_N \cup \Sigma_T)^*$: Endliche Menge von Produktionen
  - Übliche Notation: $aXbY \to cYXa$
- $S \in \Sigma_N$: Startsymbol

Ableitungen: $w \Rightarrow w'$ $(w, w' \in (\Sigma_N \cup \Sigma_T)^*)$, bedeutet dass das Anwenden einer Produktionsregel auf ein Teilwort von w das Wort w' ergibt. Die von G erzeugte Sprache ist

$$L(G) = \{w \in \Sigma_T^* \mid S \Rightarrow^* w\}$$

Grammatiken

Definition

Eine Grammatik heißt regulär (oder Typ-3), wenn sie nur Produktionen der Form $X \to w$ oder $X \to wY$ mit $X, Y \in \Sigma_N$ und $w \in \Sigma_T^*$.

Theorem

Die von regulären Grammatiken erkannten Sprachen sind genau die regulären Sprachen.

(Mann kann natürlich auch nicht-reguläre Grammatiken bauen, die trotzdem nur eine reguläre Sprache erkennen.)

Grammatiken

Aufgabe

Gegeben die Grammatik $G = (\{S, B\}, \{a, b\}\, P, S)$ mit

$$P = \{S \rightarrow aBa|aSa,$$
$$B \rightarrow aBa|b\}$$

a) Ist dies eine reguläre Grammatik?

b) Gebe eine Ableitung für das Wort *aabaa* an.

c) Welche Sprache wird von G erzeugt?

d) Eine der Produktionen ist überflüssig. Welche?

Grammatiken

Aufgabe

Gegeben die Grammatik $G = (\{S, B\}, \{a, b\} P, S)$ mit

$$P = \{S \rightarrow aBa | aSa,$$
$$B \rightarrow aBa | b\}$$

a) Ist dies eine reguläre Grammatik? Nein

b) Gebe eine Ableitung für das Wort *aabaa* an. $S \Rightarrow aSa \Rightarrow aaBaa \Rightarrow aabaa$

c) Welche Sprache wird von G erzeugt? $L(G) = \{a^n b a^n | n \in \mathbb{N}_+\}$

d) Eine der Produktionen ist überflüssig. Welche? $B \rightarrow aBa$ oder $S \rightarrow aSa$

Grammatiken

Aufgabe

Welche Sprache wird von der Grammatik $G = (\{S, B\}, \{a, b\}\, P, S)$ mit

$$P = \{S \rightarrow aSa,$$
$$B \rightarrow b\}$$

erzeugt?

Grammatiken

Aufgabe

Welche Sprache wird von der Grammatik $G = (\{S, B\}, \{a, b\}\, P, S)$ mit

$$P = \{S \rightarrow aSa,$$
$$B \rightarrow b\}$$

erzeugt?

$\boxed{L(G) = \emptyset}$

Grammatiken

Aufgabe

Welche Sprache wird von der Grammatik $G = (\{S, B, X\}, \{a, b\}\ P, S)$ mit

$$P = \{S \to aBa|aSa|X, \\ B \to b, \\ X \to X\}$$

erzeugt?

Grammatiken

Aufgabe

Welche Sprache wird von der Grammatik $G = (\{S, B, X\}, \{a, b\} P, S)$ mit

$$P = \{S \rightarrow aBa|aSa|X,$$
$$B \rightarrow b,$$
$$X \rightarrow X\}$$

erzeugt?

$L(G) = \{a^n ba^n | n \in \mathbb{N}_+\}$

Grammatiken

Aufgabe

a) Entwerfe eine reguläre Grammatik für die Sprache
$L = \{w \in \{a, b\}^* \mid w$ enthält ab als Teilwort$\}$

b) Entwerfe eine reguläre Grammatik für die Sprache
$L = \{w \in \{a, b\}^* \mid w$ enthält ab *nicht* als Teilwort$\}$