



Theoretische Informatik – Übung Gruppe 3

Roman Langrehr

Aufgabe 26

Sei $f : \mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbb{N}_0$ eine monoton steigende Funktion mit $f(n) \geq n$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$.

- a) Zeigen Sie, dass $\text{NTIME}(f)$ abgeschlossen unter Vereinigung ist.
- x) Zusatzfrage: Ist $\text{NTIME}(f)$ auch unter Schnitt abgeschlossen?
- b) Seien $L \in \text{NTIME}(f)$ und $L' \in \text{TIME}(f)$. Zeigen Sie, dass dann $L - L' \in \text{NTIME}(f)$ gilt.
- y) Zusatzfrage: Gilt das auch, wenn $L' \in \text{NTIME}(f)$

Aufgabe 27

- a) Sei M eine nichtdeterministische MTM mit $\text{Time}_M(n) \in O(n^2)$, die für jede Berechnung auf einem Wort der Länge n mit $O(n)$ Platz auskommt. Zeigen Sie, dass dann $L(M) \in \text{SPACE}(n \log n)$ gilt.
- b) Sei f eine platzkonstruierbare Funktion und sei $k \in \mathbb{N}_0$. Zeigen Sie entweder, dass

$$\text{NSPACE}(f(n)) \cap \text{NTIME}(f(n)^k) \subseteq \text{SPACE}(f(n) \log(f(n)))$$

gilt, oder erklären Sie, worin das Problem besteht, diese Aussage zu zeigen.

NP-Vollständigkeit

Definition (Polynomielle Reduktion)

Seien $L_1 \subseteq \Sigma_1^*$ und $L_2 \subseteq \Sigma_2^*$ zwei Sprachen. Wir sagen, dass L_1 polynomiell auf L_2 reduzierbar ist, $L_1 \leq_p L_2$, falls eine polynomielle TM (ein polynomieller Algorithmus) A existiert, die für jedes Wort $x \in \Sigma_1^*$ ein Wort $A(x) \in \Sigma_2^*$ berechnet, so dass

$$x \in L_1 \iff A(x) \in L_2$$

Wenn L_1 NP-schwer ist und $L_1 \leq_p L_2$, dann ist auch L_2 NP-schwer.

NP-Vollständigkeit

Definition

Eine Sprache L ist NP-vollständig, falls $L \in \text{NP}$ und L NP-schwer ist.

NP-Vollständigkeit

$3\text{COLOUR} := \{G \mid G = (V, E) \text{ ist ein ungerichteter Graph und } \exists c : V \rightarrow \{R, G, B\} : c(u) = c(v) \rightarrow (u, v) \notin E\}$

Aufgabe

Zeige direkt (ohne den Satz von Cook zu benutzen) dass $3\text{COLOUR} \leq_p \text{SAT}$.

Vorsicht: Um zu zeigen, dass 3COLOUR NP-schwer ist, müsste man $\text{SAT} \leq_p 3\text{COLOUR}$ zeigen.