Theoretische Informatik – Übung Gruppe 3

Roman Langrehr

Aufgabe 23

Zeigen Sie $(L_{\text{empty}})^{\complement} \leq_{EE} (L_{\text{diag}})^{\complement}$

$$
\begin{aligned}
L_{\text{empty}} &:= \{\text{Kod}(M) \mid L(M) = \emptyset\} \\
(L_{\text{empty}})^{\complement} &:= \{x \in \{0,1\} \mid x \notin \text{Kod}(\overline{M}) \text{ für alle TM } \overline{M} \text{ oder } x = \text{Kod}(M) \text{ und } L(M) \neq \emptyset\} \\
L_{\text{diag}} &:= \{w \in \{0,1\}^* \mid w = w_i \text{ für ein } i \in \mathbb{N}_+ \text{ und } M_i \text{ akzeptiert } w_i \text{ nicht}\} \\
(L_{\text{diag}})^{\complement} &:= \{w \in \{0,1\}^* \mid w = w_i \text{ für ein } i \in \mathbb{N}_+ \text{ und } M_i \text{ akzeptiert } w_i\}
\end{aligned}
$$

Aufgabe 24

Sei M eine 1-Band-Turingmaschine, die immer hält. Zeigen Sie, dass es dann eine zu M äquivalente 2-Band-Turingmaschine A gibt, so dass für eine Konstante c und für alle n gilt:

$$\mathrm{Time}_A(n) \leq \frac{\mathrm{Time}_M(n)}{2} + \frac{13n}{12} + c.$$

Hinweis: Die MTM A kann jeweils 12 Felder des Eingabebandes oder des Arbeitsbandes von M auf einem ihrer Felder simulieren.

Aufgabe 25

Wir betrachten eine immer haltende 1-Band-Turingmaschine, deren Arbeitsalphabet Γ genau $k+1$ Symbole enthält für ein $k \geq 2$. Wir identifizieren diese Symbole mit den Zahlen in $\{0, 1, 2, \ldots, k\}$, wobei $0 = ¢$ und $k =$ gelte. Die gegebene 1-Band-TM habe die Eigenschaft, dass der Inhalt ihres Arbeitsbandes immer aufsteigend sortiert ist und genau ein Symbol 0 enthält, also zu jedem Zeitpunkt die Form
$01^{i_1}2^{i_2}\ldots(k-1)^{i_{k-1}}kkk\ldots$ hat für irgendwelche $i_1, \ldots, i_{k-1} \in \mathbb{N}_0$. Es gelte weiter $\mathrm{Space}_M(n) = s(n)$ für eine beliebige Funktion $s(n)$.
Zeigen Sie, dass $\mathrm{Time}_M(n) \in O(n \cdot (s(n))^k)$ gilt.

Rekursive Sprachen

Aufgabe

Wenn L_1, L_2 rekursive Sprachen sind, welche der folgenden Sprachen sind dann ebenfalls rekursiv?

- $L_1^{\complement}$
- $L_1 \cup L_2$
- $L_1 \cap L_2$
- $L_1 - L_2$
- $L_1 \cdot L_2$
- L_1^*

Rekursive Sprachen

Aufgabe

Wenn L_1, L_2 rekursive Sprachen sind, welche der folgenden Sprachen sind dann ebenfalls rekursiv?

- $L_1^\complement$ Wahr
- $L_1 \cup L_2$ Wahr
- $L_1 \cap L_2$ Wahr
- $L_1 - L_2$ Wahr
- $L_1 \cdot L_2$ Wahr
- L_1^* Wahr

Rekursiv aufzählbare Sprachen

Aufgabe

Wenn L_1, L_2 rekursiv aufzählbare Sprachen sind, welche der folgenden Sprachen sind dann ebenfalls rekursiv aufzählbar?

- $L_1^\complement$
- $L_1 \cup L_2$
- $L_1 \cap L_2$
- $L_1 - L_2$
- $L_1 \cdot L_2$
- L_1^*

Rekursiv aufzählbare Sprachen

Aufgabe

Wenn L_1, L_2 rekursiv aufzählbare Sprachen sind, welche der folgenden Sprachen sind dann ebenfalls rekursiv aufzählbar?

- $L_1^\complement$ Falsch
- $L_1 \cup L_2$ Wahr
- $L_1 \cap L_2$ Wahr
- $L_1 - L_2$ Falsch
- $L_1 \cdot L_2$ Wahr
- L_1^* Wahr

Rekursiv (aufzählbare) Sprachen

Aufgabe

Seien L_1, L_2 *disjunkte* rekursiv aufzählbare Sprachen und $L := L_1 \cup L_2$ sei rekursiv. Beweise, dass dann auch L_1 und L_2 rekursiv sind.