Theoretische Informatik – Übung Gruppe 3

Roman Langrehr

Aufgabe 20

1. Begründen Sie informell die Korrektheit der folgenden Aussage: Sei L eine Sprache über einem Alphabet Σ. Falls $L \in \mathcal{L}_{\mathrm{RE}}$ und $L^{\complement} \in \mathcal{L}_{\mathrm{RE}}$, dann gilt auch $L \in \mathcal{L}_{\mathrm{R}}$.
2. Wir betrachten die Sprache $L_{U,\lambda} = \{\mathrm{Kod}(M) | \lambda \in L(M)\}$. Zeigen Sie, dass $(L_{U,\lambda})^{\complement} \notin \mathcal{L}_{\mathrm{RE}}$ gilt.

Aufgabe 21

Beweisen Sie die folgenden Aussagen, indem Sie jeweils eine konkrete Reduktion angeben und die Korrektheit dieser Reduktion zeigen.

1. $L_H \leq_R (L_{\text{diag}})^{\complement}$
2. $(L_{\text{diag}})^{\complement} \leq_R L_H$

Aufgabe 22

Zeigen Sie, dass die Sprache

$$
\begin{aligned}
L_{\mathrm{reach}} = \{\mathrm{Kod}(M)\#0^i \mid\, & i \in \mathbb{N}_0, M \text{ hat mindestens } i+1 \text{ Zustände und es gibt} \\
& \text{ein Wort } x\text{, so dass während der Berechnung von } M \\
& \text{auf } x \text{ der } i\text{-te Zustand von } M \text{ mindestens einmal} \\
& \text{erreicht wird}\}
\end{aligned}
$$

nicht rekursiv ist, indem Sie eine konkrete EE-Reduktion angeben und ihre Korrektheit beweisen.

Satz von Rice

Definition

Eine Sprache $L \subseteq \mathrm{KodTM}$ heißt semantisch nichttriviales Entscheidungsproblem über Turingmaschinen, falls folgende Bedingungen gelten:

1. es gibt eine TM M_1, so dass $\mathrm{Kod}(M1) \in L$ (daher $L \neq \emptyset$)
2. es gibt eine TM M_2, so dass $\mathrm{Kod}(M2) \in L$ (daher $L \neq \mathrm{KodTM}$)
3. für zwei Turingmaschinen A und B impliziert $L(A) = L(B)$

$$\mathrm{Kod}(A) \in L \Longleftrightarrow \mathrm{Kod}(B) \in L$$

Satz von Rice

Theorem (Satz von Rice)

Jedes semantisch nichttriviale Entscheidungsproblem über Turingmaschinen ist unentscheidbar.

Rekursiv (aufzählbare) Sprachen

Aufgabe

Sind die folgenden Sprachen rekursiv? Falls nein, sind sie immerhin rekursiv aufzählbar? Beweise deine Antwort.

- $L_1 = \{\mathrm{Kod}(M) \mid L(M) \text{ ist entscheidbar}\}$
- $L_2 = \{\mathrm{Kod}(M) \mid L(M) \text{ ist semi-entscheidbar}\}$
- $L_3 = \begin{cases} \{0\} & \text{falls der Realteil jeder nichttrivialen Nullstelle} \\ & \quad \text{der Riemannschen Zetafunktion } 1/2 \text{ ist} \\ \{1\} & \text{anonsten} \end{cases}$