Theoretische Informatik – Übung Gruppe 3

Roman Langrehr

Nichtdeterministische endliche Automaten

NEAs sind definiert wie DEAs, bis auf die Übergangsfunktion δ:

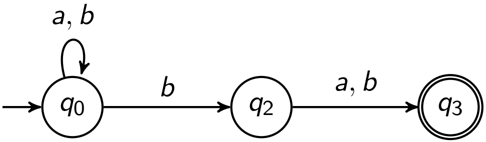
DEA:

$\delta : Q \times \Sigma \to Q$

NEA:

$\delta : Q \times \Sigma \to \mathcal{P}(Q)$

D.h. für ein Zeichen kann es auch mehrere oder garkeinen Übergang geben. Ein NEA akzeptiert ein Wort w, wenn eine akzeptierende Berechnung *existiert*.



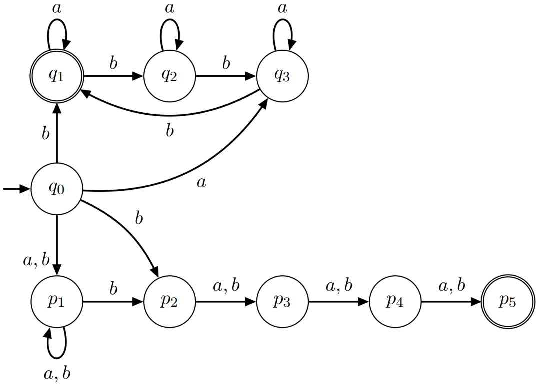
Aufgabe

Welche Sprache akzeptiert dieser NEA?

Aufgabe 15a

Entwerfe einen NEA für die folgende Sprache:

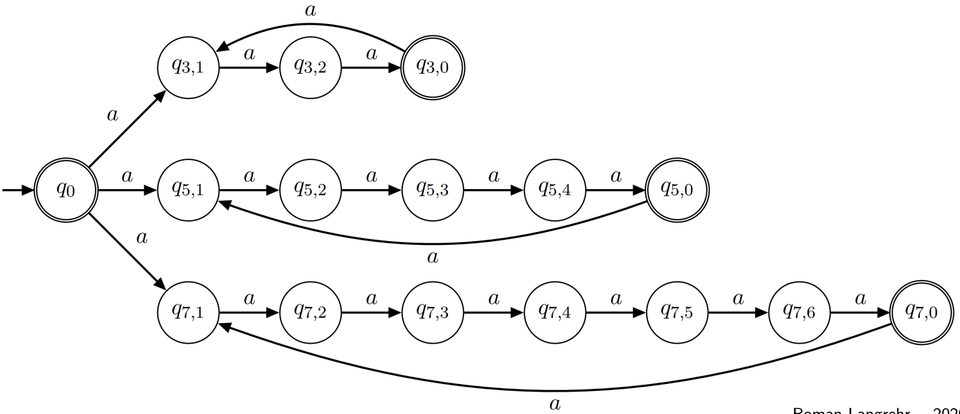
$L_1 := \{x \in \{a,b\}^* \mid |x|_b \bmod 2 = 1 \text{ oder } (x = ybz \text{ mit } y, z \in \{a,b\}^* \text{ und } |z| = 3)\}$



Aufgabe 15b

Entwerfe einen NEA für die folgende Sprache:

$L_2 := \{a^n \mid n \in \mathbb{N}_0 \text{ ist durch 3, 5 oder 7 teilbar}\}$



Aufgabe

Entwerfe einen NEA, der die Sprache

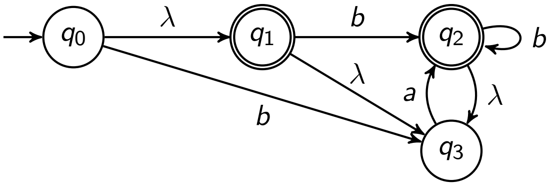
$L := \{w \in \{a, b\}^* \mid w \text{ enthält } aabaabb \text{ als Teilwort}\}$ akzeptiert.

Varianten Nichtdeterministischer endlicher Automaten

λ-NEAs: NEA bei dem auch Übergänge ohne ein Zeichen zu lesen erlaubt sind ($\delta : Q \times (\Sigma \cup \{\lambda\}) \to \mathcal{P}(Q)$).

Aufgabe

1. Gebe ein Verfahren an, mit dem man jeden beliebigen λ-NEA in einen äquivalenten NEA umwandeln kann.
2. Wende das Verfahren auf folgenden NEA an:

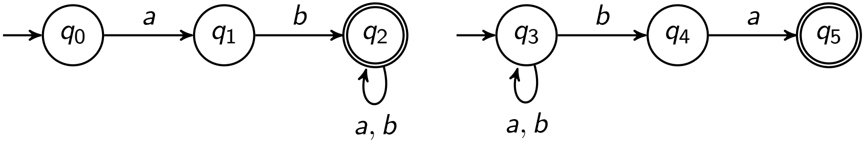


Varianten Nichtdeterministischer endlicher Automaten

NEAs mit mehreren Startzuständen: Akzeptieren ein Wort w wenn ein Startzustand *existiert* von dem aus der NEA das w akzeptiert.

Aufgabe

1. Gebe ein Verfahren an, mit dem man jeden beliebigen NEA mit mehreren Zuständen in einen äquivalenten λ-NEA umwandeln kann.
2. Wende das Verfahren auf folgenden NEA mit mehren Startzuständen an:



Potenzmengenkonstruktion

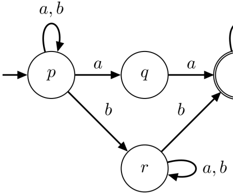
Theorem

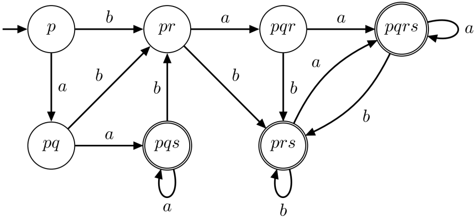
Zu jedem NEA M existiert ein EA A, so dass $L(M) = L(A)$.

- A hat Zustandsmenge $\mathcal{P}(Q)$ (Q: Zustandsmenge von M).
- A hat Übergang $p \xrightarrow{x} q$ genau dann wenn $\exists x \in p, \exists y \in q$ so dass M einen Übergang $x \xrightarrow{x} y$ hat.
- $p \in \mathcal{P}(Q)$ ist akzeptierend, genau dann wenn ein $x \in p$ existiert dass in M akzeptierend ist.

Aufgabe 16a

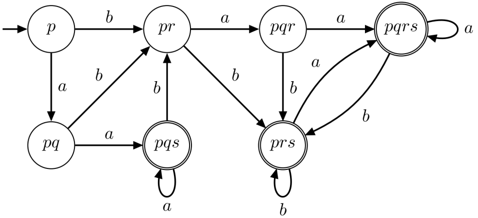
Wende die Potenzmengenkonstruktion auf folgenden NEA an.





Aufgabe 16b

Zeige, dass jeder EA, der äquivalent zu dem aus 16a mindestens 6 Zustände hat.



(Zustände *prs* und *pqrs* kann man verschmelzen.)

Lösungsidee: Lemma 3.3 anwenden.

Wir müssen 6 Wörter $w_1, \ldots, w_6$ und für jedes Paar (i, j) $(i < j)$ ein $z_{i,j}$ finden, so dass von den Wörtern $\{w_i z_{i,j}, w_j z_{i,j}\}$ eines in L_1 liegt und eines nicht.

Endliche Automaten

Lemma (3.3)

Sei A ein endlicher Automat und $x, y \in \Sigma^*$, $x \neq y$, so dass

$$(q_0, x) \vdash_A^* (p, \lambda) \quad \textit{and} \quad (q_0, y) \vdash_A^* (p, \lambda)$$

dann gilt für alle $z \in \Sigma^*$

$$xz \in L \Longleftrightarrow yz \in L\,.$$

Potenzmengenkonstruktion

- Wenn ein NEA M n Zustände hat, hat der per Potenzmengenkonstruktion konstruierte EA 2^n Zustände.
- Manchmal ist das exponentielle Wachstum unvermeidbar (Buch: $L_k := \{x1y \mid x \in \{0,1\}^*, y \in \{0,1\}^{(k-1)}\}$, es gibt NEA mit $k+1$ Zuständen, EA braucht mindestens 2^k).
- Manchmal nicht (z.B. wenn der NEA M bereits deterministisch ist.)

Potenzmengenkonstruktion

Aufgabe

Wie kann man zu einem NEA M den *kleinsten* äquivalenten EA A effizient (Laufzeit polynomiell in der Anzahl Zustände von M und A) finden?

- Potenzmengenkonstruktion + Minimieren ist nicht effizient genug
- 1 Mio. $ Preisgeld für denjenigen der das schafft!
- Die meisten Informatiker vermuten, dass das unmöglich ist.

Reguläre Sprachen

Aufgabe

Sind die folgenden Sprachen regulär oder nicht? Beweise deine Antwort.

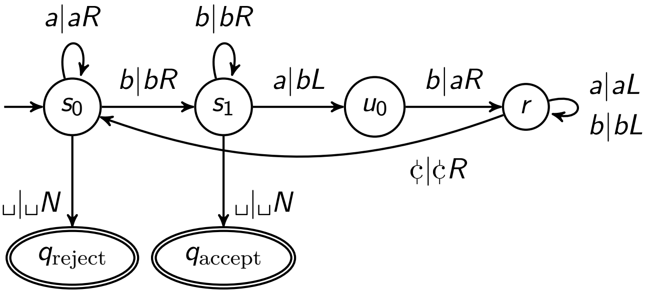
1. $\{w \in \{a, b\}^* \mid w$ enthält genauso viele Teilworte der Form ab wie $ba\}$
2. $\{w \in \{a, b, c\}^* \mid w$ enthält genauso viele Teilworte der Form ab wie $ba\}$

Turingmaschinen

"TM = Endlicher Automat + (unendliches) Band mit einem Kopf der ein Zeichen lesen/schreiben kann"

- Übergangsfunktion
  - Eingabe: Aktueller Zustand + Aktuelles Bandsymbol
  - Ausgabe: Neuer Zustand + Neues Bandsymbol + Armbewegung (L/N/R)
- Eingabewort: Steht zu Beginn auf dem Band.
- 2 besondere Zustände:
  - Akzeptierender Zustand
  - Verwerfender Zustand
  - In beiden ist keine weiter Aktion mehr möglich.
- Ausgabe: Akzeptierender Zustand, Verwerfender Zustand, Endlosschleife.
  - Bandinhalt kann als zusätzliche Ausgabe interpretiert werden.

Turingmaschinen



Aufgabe

Welche Worte akzeptiert/verwirft diese TM? Was steht nach Eingabe von $w \in \{a, b\}^*$ auf dem Band?

Turingmaschinen

- L ist *rekursiv aufzählbar* $:\iff$ Es gibt eine Turingmaschine die L akzeptiert (d.h. die Turingmaschine hält genau für die Worte $w \in L$ in dem akzeptierenden Zustand.)
- L ist *rekursiv* oder *entscheidbar* $:\iff$ Es gibt eine Turingmaschine die L für die Worte $w \in L$ in dem akzeptierenden Zustand hält und für $w \notin L$ in dem verwerfenden Zustand hält.

Theorem

L ist entscheidbar genau dann wenn L und $\Sigma^* - L$ beide rekursiv aufzählbar sind.