Theoretische Informatik – Übung Gruppe 3

Roman Langrehr

Aufgabe 4b

Geben Sie eine unendliche Folge von natürlichen Zahlen $y_1 < y_2 < \cdots$ an, so dass eine Konstante $c \in \mathbb{N}_0$ existiert, so dass für alle $i \geq 1$

$$K(y_i) \leq \log_2 \log_3 \log_2(y_i) + c$$

Kolmogorov-Komplexität

Definition

Die Kolmogorov-Komplexität einer natürlichen Zahl n ist

$$K(n) := K(\mathrm{Bin}(n))$$

Definition (Kolmogorov-Komplexität)

Für jedes Wort $w \in \{0,1\}^*$ ist die Kolmogorov-Komplexität $K(w)$ des Wortes w das Minimun der binären Längen der Pascal-Programme, die w generieren.

Aufgabe 5

Zeigen Sie, dass es für jedes $n \in \mathbb{N}_+$ und jedes $i < n$ mindestens $2^n - 2^{n-i}$ natürliche Zahlen x in dem Intervall $[2^n, 2^{n+1} - 1]$ gibt mit $K(x) \geq n - i$.

Aufgabe 6

Wir betrachten die Sprache

$$L = \left\{1^i 0^j 1^k \mid i + j = 2k, i, j, k \in \mathbb{N}_0, k \geq 1\right\}$$

Sei $w \in L$. Zeigen Sie, dass es eine konstante $c \in \mathbb{N}_0$ gibt, so dass für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt:

$$K(w) \leq 2\log(|w|) + c$$

Kolmogorov-Komplexität

Theorem

Sei L eine entscheidbare Sprache über $\Sigma = \{0, 1\}$ und für jedes $n \in \mathbb{N}_+$ sei w_n das n-te Wort aus L bezüglich der kanonischen Ordnung. Dann ist

$$K(w_n) \leq \lceil \log_2(n+1) \rceil + c$$

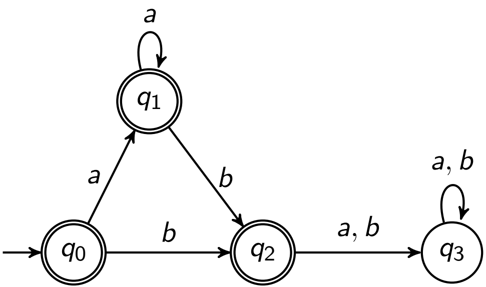
für eine von n unabhängige Konstante c.

Kolmogorov-Komplexität

Aufgabe

Sei $L := \{0\}\left(\left\{1^n 0^{m^{99}} 1^{m^n} \mid m = n^{\lfloor \log_{42}(n) \rfloor}\right\} \cup \{0,1\}^*\right) \cup \{1\}\left(\{0,1\}^* - \{1^{29092020}\}\right)$.
Gebe eine möglichst gute obere Schranke für $K(w)$ in Abhängigkeit von $|w|$ für $w \in L$ an.

Endliche Automaten



Aufgabe

Welche Sprache akzeptiert dieser endliche Automat?

Endliche Automaten

Aufgabe

Sei $\Sigma := \{a, b, c\}$. Entwerfe einen endlichen Automaten der folgende Sprache akzeptiert:

1. Die Sprache $L := \{a\}^*\{b\}^*\{c\}^*$
2. Die Sprache $\Sigma^* - L$
3. Die Sprache $L' = \left\{1^i0^j1^k \mid i + j = 2k, i, j, k \in \mathbb{N}_0, k \geq 1\right\}$