



# Theoretische Informatik – Übung Gruppe 3

Roman Langrehr

# Organisatorisches

- Maskenpflicht gilt auch hier!
- Folien gibt es (demnächst) auf:  
<http://foc.ethz.ch/people/romanlangrehr/ti2020.html>
- Inhaltliche/Organisatorische Fragen, Feedback gerne an: [roman.langrehr@inf.ethz.ch](mailto:roman.langrehr@inf.ethz.ch)

## Organisatorisches: Übungsblätter

- Abgeben lohnt sich!
  - (unsicher) 50% notwendig für Zwischenklausur, die Klausurbonus bringt.
  - (100% sicher) Wissensbonus für die Klausur
- Abgaben in Kleingruppen bis 3 Personen möglich.
  - Dringende Empfehlung: Jeder schreibt mindestens eine Aufgabe auf.

## Organisatorisches: Übungsblätter

- Abgabe bis Freitag 11:15
  - auf Papier in CAB F 17.1
  - als *gut lesbares PDF* an [roman.langrehr@inf.ethz.ch](mailto:roman.langrehr@inf.ethz.ch)
    - ▶ Handy-Fotos sind meistens nicht gut lesbar.
    - ▶ Scans mit einem echten Scanner und mind. 300 dpi sind gut lesbar (wenn die Handschrift gut lesbar ist).
    - ▶ In PDF kompilierte  $\LaTeX$ , LibreOffice oder Word Dokumente sind gut lesbar (wenn als Schriftart nicht Comic Sans MS verwendet wurde).
    - ▶ *PDF* bedeutet insbesondere: Kein DOC, DOCX, ODT, MD, JPG, PNG, GIF, ZIP dass in hunderten verschachtelten Ordner ein PDF enthält, EXE dass vom Virens scanner geblockt wird.
    - ▶ als Abgabezeit zählt wann ich die E-Mail empfangen habe (nicht der E-Mail Zeitstempel).

## Organisatorisches: Übungsblätter

- Korrigierte Rückgabe:
  - (ausgedruckt) auf Papier im nächsten Tutorium.
  - als annotiertes PDF (oder gut lesbarer PDF-Scan) an den Absender (und CC-Empfänger).
  - Bei Mail-Abgaben könnt ihr angeben, ob ihr die Korrektur per Mail oder per Papier erhalten wollt.
- Fragen?

# Wörter und Sprachen

## Definition (Alphabet)

Ein Alphabet  $\Sigma$  ist eine nichtleere, endliche Menge von Zeichen.

## Definition (Wort)

Ein Wort  $w$  über  $\Sigma$  ist eine endliche Folge in  $\Sigma$ .

## Definition (Sprache)

Eine formale Sprache  $L$  ist eine Menge von Wörtern.

# Wörter und Sprachen

Notation:

- Für das Wort der Länge 0 (das leere Wort) schreiben wir  $\lambda$ .
- Die Menge aller Wörter über  $\Sigma$  bezeichnen wir mit  $\Sigma^*$ .
- Für die Konkatenation von  $v$  und  $w$  schreiben wir  $v \cdot w$  oder einfach  $vw$ .
- $L_1 \cdot L_2 := L_1 L_2 := \{vw \mid v \in L_1, w \in L_2\}$
- Für die Länge von  $w$  schreiben wir  $|w|$ .
- Für die Anzahl der vorkommen von  $x \in \Sigma$  in einem Wort  $w$  schreiben wir  $|w|_x$ .

Theorem

$(\Sigma^*, \cdot)$  ist ein Monoid.

# Wörter und Sprachen

## Aufgabe

Sei  $\Sigma = \{a, b\}$  und

$$L_0 := \{\lambda\}$$

$$\forall n \in \mathbb{N}_0 : L_{n+1} := L_n \cup \{a \cdot w \cdot b \mid w \in L_n\}$$

1. Gebe  $L_1$ ,  $L_2$  und  $L_3$  an.
2. Gebe *nicht-induktiv*  $L_n$  für  $n \in \mathbb{N}_0$  an.
3. Beweise das deine Lösung für 2 richtig ist.

# Wörter und Sprachen

## Aufgabe

Beweise: Für alle  $w \in \Sigma^*$  und alle  $x \in \Sigma$  gilt  $|w|_x \leq |w|$ .

# Wörter und Sprachen

## Definition (Iteration von Wörtern)

Die  $i$ -te Iteration von  $w \in \Sigma^*$  ist wie folgt definiert:

$$w^0 := \lambda$$
$$\forall i \in \mathbb{N}_+ : w^i := w \cdot w^{i-1}$$

# Wörter und Sprachen

## Definition (Iteration von Sprachen)

Die  $i$ -te Iteration von einer Sprache  $L \subset \Sigma^*$  ist wie folgt definiert:

$$L^0 := \{\lambda\}$$
$$\forall i \in \mathbb{N}_+ : L^i := L \cdot L^{i-1}$$

# Wörter und Sprachen

## Definition (Kleenscher Abschluss)

Der kleensche Abschluss von  $L \subset \Sigma^*$  ist

$$L^* := \bigcup_{i \in \mathbb{N}_0} L^i.$$

Außerdem definieren wir

$$L^+ := \bigcup_{i \in \mathbb{N}_+} L^i.$$

# Wörter und Sprachen

## Aufgabe

Zeige oder widerlege:

- $|w^i| \leq |w^{i+1}|$
- $|w^i| < |w^{i+1}|$
- $|L^i| \leq |L^{i+1}|$
- $|\Sigma^*|$  ist unendlich.
- $|L^*|$  ist unendlich.

# Wörter und Sprachen

## Aufgabe

Zeige oder widerlege:

- $|w^i| \leq |w^{i+1}|$  **Wahr**
- $|w^i| < |w^{i+1}|$  **Falsch**
- $|L^i| \leq |L^{i+1}|$  **Falsch**
- $|\Sigma^*|$  ist unendlich. **Wahr**
- $|L^*|$  ist unendlich. **Falsch**

# Wörter und Sprachen

## Aufgabe

Sei  $\Sigma := \{a, b\}$  mit der totalen Ordnung  $a \leq b$ .

1. Definiere ein Prädikat `sorted` das angibt ob ein Wort sortiert ist (in dem Sinne das alle *as* vor den *bs* kommen).
2. Wie groß ist  $\{w \in \Sigma^n \mid \text{sorted}(w) = 1\}$ ?
3. Definiere eine Funktion `sort`, so dass folgendes gilt:
  - $\forall w \in \Sigma^* \forall x \in \Sigma : |w|_x = |\text{sort}(w)|_x$
  - $\forall w \in \Sigma^* : \text{sorted}(\text{sort}(w)) = 1$
4. Beweise, dass die Eigenschaften aus Punkt 3 erfüllt sind.