$\phi_{Gruppen} \approx 20P \qquad \phi_1 = 15P$

Übungsblatt 2:

A4: a) Frage $\exists x = (x_n)_{n=1}^{\infty}$

$\exists c \in \mathbb{N} \ \forall n \in \mathbb{N}_+ : \underline{K(x_n) \leq \log_2 \log_2 \boxed{|x_n|} + c}$ (1)

$\wedge \ \forall i,j : i \neq j \Rightarrow x_i \neq x_j$ (2)

$\forall n \in \mathbb{N}_+ : x_n := 0^{2^n} \qquad \Sigma = \{0\}$

(1) $\Leftarrow$ für jedes n ist $\underbrace{|x_n|}_{2^n}$ eindeutig $\wedge$ unterschiedlich $\quad \mu : n \mapsto 2^n$ injektiv

(2) $\pi = (\pi_n)_{n=1}^{\infty}$

π_n:

```
begin
    s := n;          abh. von n
    j := 1;
    for i := 1 to s do
        j := j * 2;          } j := pow(2,s) ≙ 2^n // intuitiv
    for i := 0 to j do
        write( 0 );          } → 0^(2^n) = x_n
end
```

const

$|\pi_n| = |n| + c$ für $c \in \mathbb{N}_+$ unab. von n.

$K(x_n) \leq |\pi| = |n| + c \leq \underbrace{\lceil \log_2(\log_2 |x_n| + 1) \rceil}_{\leq \log_2 \log_2 |x_n| + c'} + c \leq \log_2 \log_2 |x_n| + \underbrace{c' + c}_{c''}$

$|x_n| = 2^n \Leftrightarrow n = \log_2 |x_n|$

$|n| \leq \lceil \log_2(n+1) \rceil = \lceil \log_2(\log_2 |x_n| + 1) \rceil \qquad \exists c'' \in \mathbb{N} \ \forall n \ldots$

$\exists c' \in \mathbb{N}_+ : \forall x \in \mathbb{N}_+ : \lceil \log_2(x+1) \rceil \leq \log_2 x + c'$

4b) Frage $\exists x = (x_n)_{n=1}^{\infty}$ s.d.

$\exists c \in \mathbb{N} \ \forall n \in \mathbb{N}_+ : K(x_n) \leq \underbrace{\log_2(\sqrt{n}) + c}_{} = t(n)$

$\wedge$ paarweise verschiedene x

Gegenannahme: $\exists x \ldots$ | Annahme: $\forall c \in \mathbb{N} \ \exists n \in \mathbb{N}_+ : K(x_n) > \log_2 \sqrt{n} + c$

$\Leftrightarrow \overline{\exists c \in \mathbb{N} \ \forall n \in \mathbb{N}_+ : K(x_n) \leq \log_2 \sqrt{n} + c}$

Sei $n \in \mathbb{N}_+$.

Dann gibt es max $\sum_{i=0}^{t(n)} 2^i = 2^{t+1} - 1 = 2^{\log_2 \sqrt{n} + c + 1} - 1$

$= \sqrt{n}\, 2^{c+1} - 1$ Programme, die x_n erzeugen

$= \# \pi(n)$

Unsere Folge $(x_1, \ldots, x_n)$ muss erzeugt sein durch eine Folge von Programmen $\pi_n' = (\pi_1 \ldots \pi_n)$ mit Länge max. $t(n)$

π_n' besteht aus n Programmen, aber es gibt max. $\# \pi(n)$ viele mögl. Prog.

$\forall c \in \mathbb{N} \ \exists n_0^{(c)} \in \mathbb{N} : n_0 > \# \pi(n_0)$ $\lightning$ zur Gegenannahme

---

$\boxed{\# \text{Wörter} = |\Sigma|^{\text{Länge}}} \qquad \Rightarrow$ Annahme gilt

---

5) $Q = \{n^2 \mid n \in \mathbb{N}\}$. Z.z. endlich viele Elemente $q \in Q$ sind zufällig.

Def: Zufällig (Def. 2.19.)

$x \in (\Sigma_{bool})^*$ heisst zufällig $\Leftrightarrow K(x) \geq |x|$

$n \in \mathbb{N}$ heisst zufällig $\Leftrightarrow K(n) := K(Bin(n)) \geq \lceil \log_2(n+1) \rceil - 1$

Gegenannahme: Fast alle viele $q \in Q$ sind zufällig.

F.a. n gilt $K(n^2) \geq \lceil \log(n^2+1) \rceil - 1 \geq 2 \log_2 n - 1$

Programm π_n: $|\pi_n| = |n| + c$ für c konst. und unab. von n

$\Rightarrow K(n^2) \leq |\pi_n| = |n| + c \leq \log_2 n + c'$ für c' konst. ...

unbedingt

$2 \log_2 n - 1 \leq K(n^2) \leq \log_2 n + c' \quad | -\log_2 n + 1$

$\log_2 n \leq c' + 1$

$\exists c' \in \mathbb{N} \ \forall n \in \mathbb{N} : K(n^2) \leq \log_2 n + c'$

$2\log_2 n - 1 \leq$

$\Rightarrow \exists c' \in \mathbb{N} \ \forall n \in \mathbb{N} : 2 \log_2 n - 1 \leq \log_2 n + c'$

$\Leftrightarrow \log_2 n \leq c' + 1$

$n = 2^{c'+2} \qquad \log_2 n = c' + 2$

$\lightning$ zur Gegenannahme

$\Rightarrow$ Annahme gilt!

---

6) $L := \{1^i 0^j 1^k \mid i,j,k \in \mathbb{N}_+\} \qquad \Sigma_{bool} = \{0,1\}$

x_n sei das kanonisch n-te Wort in L.

Z.z. $\exists c \in \mathbb{N} \ \forall n \in \mathbb{N}_+ : K(x_n) \leq 3 \cdot \log_2 |x_n| + c$

Satz 2.2. $\Rightarrow K(x_n) \leq \log_2 n + c + 1$ für konst. c unab. von n

$\leq \log_2 |x_n|^3 + c + 1 = 3 \log_2 |x_n| + c + 1$

$\exists A_L$

$n \sim |x_n|$

$W = \{1^i 0^j 1^k \mid i+j+k \leq |x_n|, \ i,j,k \in \mathbb{N}_+\}$

$x_n \in W \Rightarrow i,j,k \leq |x_n| \Rightarrow n \leq \# W \leq |x_n|^3$

$x_n \in W$