Abgabe an nicholas.brandt@inf.ethz.ch

Bis Freitags 11:15 Uhr

CAB

overleaf.com

Abgaben bis 3 Personen

Inhalt:

Def: Alphabet

Σ ist eine nicht-leere Menge von Zeichen

Def: Wort

w über Σ ist eine endliche Folge von Zeichen aus Σ.

Def: Sprache

L ist eine Menge von Wörtern.

$L = \{w \mid \dots\}$

Leere Wort:

λ hat Länge 0. // ε

Menge aller Wörter über Σ : Σ^*

Konkatenation von v und w schreiben wir als $v \cdot w$ oder vw

---

$L_1 \cdot L_2 = L_1 L_2 := \boxed{\{ \underbrace{w_1 w_2}_{\text{Wort}} \mid \underbrace{w_1 \in L_1 \wedge w_2 \in L_2}_{\text{Bed.}} \}}$

$|w|$ Länge

$w = 001 \qquad |w| = 3$

$|w|_x$ Anzahl der Vorkommen

$w = x1x0yz$

$|w|_x = 2$

$\Sigma^* = \{w \mid w \text{ besteht nur aus Zeichen aus } \Sigma\}$

$L^* := \bigcup_{i \in \mathbb{N}_0} L^i \supseteq L^0$

$\underbrace{L \cdot L \cdot \ldots \cdot L}_{i\text{-mal}}$

$L^+ := \bigcup_{i \geq 1} L^i$

$L^* := L^+ \cup L_0$

$L^+ := \bigcup_{i \in \mathbb{N}_+} L^i = \boxed{L^* - L_0}$

$i=0$

$L^* \setminus L_0$

Def: 2.9

$L_\lambda = \{\lambda\} \qquad L^0 := L_\lambda = \{\lambda\}$

$L_\emptyset = \{\} = \emptyset \qquad \lambda \notin L_\emptyset$

$L = \{\lambda, a\}$

$L^* = \{\lambda, a, a^2, a^3, \dots\}$

$L^+ = \{\lambda, a, a^2, a^3, \dots\}$

Aufgabe:

Seien L_1, L_2, L_3 Sprachen über Σ.

Beweise

$L_1 \subseteq L_2 \Rightarrow L_1 L_3 \subseteq L_2 L_3$

$\Leftrightarrow \forall x \in L_1 L_3 : x \in L_2 L_3$

$\Rightarrow \forall x \in L_1 L_3\ \exists x_1 \in L_1, x_3 \in L_3 : x = x_1 \cdot x_3$

$\forall x_1 \in L_1 : x_1 \in L_2 \Rightarrow \underset{x}{x_1 \cdot x_3} \in L_2 L_3$

Def: 2.2 $\quad \Sigma^+ := \Sigma^* \setminus \{\lambda\}$

Def: 2.9 $\quad L^+ := \bigcup_{i \geq 1} L^i$

$L^* := \bigcup_{i \geq 0} L^i$

Gilt $L_1 \subsetneq L_2 \Rightarrow L_1 L_3 \subsetneq L_2 L_3$?

Def: Iteration v. Wörtern

$w^0 := \lambda$

$\forall i \in \mathbb{N}_+ : w^i := w \cdot w^{i-1}$

Aufgabe:

$\forall w \in \Sigma^*$: $\underbrace{|w^i|}_{n} \overset{?}{\leq} |w^{i+1}| = |w \cdot w^i| = \underbrace{|w|}_{\geq 0} + \underbrace{|w^i|}_{n}$

$|w^i| \overset{?}{\subsetneq} |w^{i+1}|$ / Gegenbeispiel $w = \lambda$

$\underbrace{|L^i|}_{x} \overset{?}{\leq} |L^{i+1}| = |\underbrace{L}_{\text{prefix}} \cdot \underbrace{L^i}_{x}|$ // richtig*

$\rightarrow |\Sigma^*| = \infty$ ✓ $\qquad \lambda \notin \Sigma$

$|L^*| \overset{?}{=} \infty$ ↯ Gegenbeispiel $L_\emptyset$: $|L_\emptyset^*| = |\{\lambda\}| = 1$

$L_\emptyset^* := \underbrace{L_\emptyset^0}_{= \{\lambda\}} \cup \underbrace{L_\emptyset^1}_{= \emptyset} \cup \underbrace{L_\emptyset^2}_{= \emptyset} \cup \dots = \{\lambda\}$

Aufgabe:

$(\Sigma^*, \cdot)$ ist ein Monoid.

Menge, Operation (binär)

$\exists \lambda : \forall x \in \Sigma^* : \lambda \cdot x = x$

neutrales Element

$(L^*)^* \overset{?}{=} L^*$

Seien L_1, L_2, L_3 Sprachen über $\Sigma = \{0\}$

Gilt $L_1(L_2 \cap L_3) \subseteq L_1 L_2 \cap L_1 L_3$ ✓

$\forall x \in L_1(L_2 \cap L_3) : \exists x_1 \in L_1, x_{23} \in L_2 \cap L_3 : x = x_1 x_{23}$

$\forall x_{23} \in L_2 \cap L_3 : x_{23} \in L_2 \wedge x_{23} \in L_3$

$x = \overset{\in L_1}{x_1} \overset{\in L_2}{x_{23}} \in L_1 L_2$

$\wedge\ x = \underset{L_1}{x_1} \underset{\in L_3}{x_{23}} \in L_1 L_3$

$\Rightarrow x = x_1 x_{23} \in L_1 L_2 \cap L_1 L_3$

$\underbrace{L_1(L_2 \cap L_3)}_{= \emptyset} \overset{?}{\supseteq} \underbrace{L_1 L_2 \cap L_1 L_3}_{000 \in}$ falsch!

$L_2 = \{0\} \quad L_3 = \{00\} \Rightarrow L_1 \underbrace{(L_2 \cap L_3)}_{\emptyset} = \emptyset$

$L_1 = \{0, 00\}$

$\Rightarrow L_1 L_2 = \{00, 000\} \qquad L_1 L_3 = \{000, 0000\}$

$L_1 L_2 \cap L_1 L_3 = \{000\}$